SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

D. GUIDETTI

REGOLARITA' MASSIMALE ED EQUAZIONI PARABOLICHE CON CONDIZIONI AL CONTORNO NON OMOGENEE

19 GENNAIO 1989

In questo seminario esporrò alcuni risultati di regolarità massimale per le equazioni paraboliche, considerando più in particolare il caso di condizioni al contorno non omogenee.

Cominciamo a dare un'idea di cosa intendiamo per regolarità massimale e della sua utilità nello studio delle equazioni paraboliche (soprattutto non lineari).

Cominciamo a considerare un problema del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & 0\le t\le T \\ g(u(t)) = 0 & " \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con le seguenti ipotesi: E, F, G sono tre spazi di Banach, $f\in C'(E;F)$, $g\in C'(E,G)$, $E \hookrightarrow F$, $u_0\in E$, $g(u_0) = 0$.

Indicando con f' il differenziale di f e con g' quello di g e ponendo $v(t) = u(t)-u_0$, si ottiene (da $f(u) = f(u_0) + f'(u_0) + r(u_0;u-u_0)$ e $g(u) = g(u_0) + g'(u_0)(u-u_0) + s(u_0; u-u_0)$)

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = f'(u_0)v + f(u_0) + r(u_0;v) \\ g'(u_0)v + s(u_0;v) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Per $v\in C'([0,T];F)\cap C([0,T];E)$, poniamo $\tau v = (\frac{dv}{dt} - f'(u_0)v,\ g'(u_0)v)$.

Supponiamo che esistano tre spazi X,Y,Z tali che

$X \hookrightarrow \{v\in C'([0,T];F)\cap C([0,T];E) \mid v(0)=0\}$,

$Y \hookrightarrow C([0,T];F)$, $z\hookrightarrow C([0,T), G)$ tali che τ stabilisca un isomorfismo lineare tra X e Y x Z. Allora (2) si riconduce a

$$\tau(v) = (f(u_0) + r(u_0;v), -S(u_0;v))$$

da cui $v = \tau^{-1}(f(u_0),0) + \tau^{-1}(r(u_0;v), -s(u_0',v))$.

Si può quindi pensare di determinare una soluzione locale di (2) applicando il teorema delle contrazioni. Inoltre, il fatto che τ stabilisca un isomorfismo tra X e YxZ permette, in un certo senso, di ricavare la massima quantità di informazione possibile sulla regolarità della soluzione.

E' importante dunque stabilire risultati di isomorfismo del tipo suddetto per equazioni di evoluzione lineari.

Anche se l'applicazione sistematica della teoria della regolarità massimale a problemi non lineari è iniziata soltanto con [1], risultati di regolarità massimale anche in casi estremamente generali sono noti da molti anni. Citiamo per tutti un lavoro di Solonnikov [2] che tratta problemi parabolici non lineari di ogni tipo (si considerano anche sistemi e operatori di ordine superiore nella variabile temporale).

Enunciamo uno dei risultati principali di Solonnikov in un caso semplice: consideriamo il problema

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial x_j} = f(t,x), \quad t\in[0,T]\ x\in\Omega \\ u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = g(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con $a_{ij}\in C([0,T]x\bar{\Omega})$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j v|\xi|^2$ $(v>0)$

Supponiamo di cercare condizioni su f,g,u_0 affinché (3) abbia una soluzione in $W^{1,p}([0,T];\ L^p(\Omega))\cap L^p([0,T];\ W^{2,p}(\Omega))$ $(1<p<+\infty)$. Necessariamente, $f\in L^p([0,T];\ L^p(\Omega))$, $g\in L^p([0,T];\ W^{2-1/p}(\partial\Omega))$. Si può vedere (vedi [3], th. 7.6) che, da

$u \in W^{1,p}([0,T]; L^p(\Omega))$ segue anche $g \in W^{1-1/2p,p}([0,T]; L^p(\partial\Omega))$. Consideriamo, infine u_o: chiaramente, $u_o \in L^p(\Omega)$. Ma, sempre da [3], th. 7.6, si deduce anche $u_o \in W^{2(1-\frac{1}{p}),p}(\Omega)$.

Inoltre, se $2(1-\frac{1}{p}) > \frac{1}{p}$, si può vedere che u è continuo a valori in uno spazio di Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, con $s > \frac{1}{p}$. Ne segue che $u_o\big|_{\partial\Omega}=0$.

Ebbene, Solonnikov ha dimostrato che, se $f \in L^p([0,T]; L^p(\Omega))$, $g \in W^{1-\frac{1}{2p},p}([0,T];\partial\Omega) \cap L^p([0,T]; W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))$, $u_o \in W^{2(1-\frac{1}{p}),p}(\Omega)$, $u_o\big|_{\partial\Omega}=0$ se $2(1-\frac{1}{p}) > \frac{1}{p}$ e $2(1-\frac{1}{p}) \neq \frac{1}{p}$, il problema (3) ha un'unica soluzione in $W^{1,p}([0,T]; L^p(\Omega)) \cap L^p([0,T]; W^{2,p}(\Omega))$. Questo è un risultato di regolarità massimale.

Un altro risultato di regolarità massimale interessante è stato ottenuto recentemente da B. Terreni [4]. Nel lavoro di Terreni si considerano in realtà sistemi ellittici del secondo ordine con condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann. Per semplicità limitiamoci a considerare il caso di un'equazione:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(t,x) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u - g(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

Cerchiamo condizioni su f, g e u_o affinché (4) abbia una soluzione in $C^{1+\alpha}([0,T]; L^p(\Omega)) \cap C^{\alpha}([0,T]; W^{2,p}(\Omega))$ $(0<\alpha<1)$.

Chiaramente, f deve appartenere a $C^{\alpha}([0,T]; L^p(\Omega))$. Se, ad esempio,

$\sum_{j=1}^{n} b_j(x)v_j(x) \neq 0 \forall x \in \partial\Omega$ ($v(x)$ = versone normale esterno), $\sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}$ +

+ $h(x)u = B(x,\partial)u \in C^{\alpha}((0,T]; W^{1,p}(\Omega))$. Inoltre, poiché $u \in C^{\alpha+1/2}((0,T]; W^{1,p}(\Omega))$ (se $\alpha \neq \frac{1}{2}$), si ha $B(x,\partial)u \in C^{\alpha+1/2}(0,T]; W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))$.

Infine, u_0 deve appartenere a $W^{2,p}(\Omega)$. Deve essere però soddisfatta un'ulteriore condizione (più riposta). Dal fatto che $u \in C^{\alpha}((0,T]; W^{2,p}(\Omega)) \cap C^{1+\alpha}([0,T]; L^p(v)$ Terreni prova che segue l'appartenenza di $u'(t)$ allo spazio di interpolazione $(L^p(\Omega), W^{2,p}(\Omega))_{\alpha,\infty} = B^{2\alpha}_{p,\infty}(\Omega)$. Dunque, necessariamente $A(x,\partial)u_0 + f(0,\cdot) \subset B^{2\alpha}_{p,\infty}(\Omega)$. Viceversa, Terreni prova che, se tutte le condizioni necessarie suddette sono soddisfatte, (4) possiede una soluzione (unica) u in $C^{1+\alpha}([0,T]; L^p(\Omega)) \cap C^{\alpha}([0,T]; W^{2,p}(\Omega))$, purché $\alpha < p^{-1}$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Al di là del risultato in sé, è interessante anche la dimostrazione. Terreni usa una formula di rappresentazione esplicita della soluzione: indichiamo con A il seguente operatore: $D(A) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) | B(x,\partial)u\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ $Au = A(x,\partial)u$. A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $\exp(tA)$ in $L^p(\Omega)$. Sia $\lambda \in \rho(A)$.

Consideriamo il problema

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda u - A(x,\partial)u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ B(x,\partial)u - g\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

con $g \in W^{1,p}(\Omega)$. Il problema (5) ha un'unica soluzione $N(\lambda)g$ in $W^{2,p}(\Omega)$.

Sia ora Γ la curva $\{t \exp(-i\theta_0) | t \geq 0\} \cup \{t \exp(i\theta_0 | t \geq 0\}$, con $\theta_0 > \pi/2$, tale che $\forall \lambda \in C$, se $|\text{Arg } \lambda| \leq \theta_0$, $\lambda \in \rho(A)$. (Qui supponiamo, e ciò non è restrittivo, che $0 \in \rho(A)$). Allora, poniamo, per $t > 0$:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t) N(\lambda) d\lambda$$

Si verifica che, $\forall t > 0$, $K(t) \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$. Formalmente, una soluzione di

(4) è data da

$$(6) \qquad u(t) = \exp(tA)u_0 + \int_0^t \exp((t-s)A)f(s)ds + \int_0^t K(t-s)g(s)ds$$

Si tratta quindi di verificare che u è soluzione del problema e ha la regolarità voluta.

Nel corso della dimostrazione si rende necessaria una modifica della classica stima di Agmon per l'operatore $N(\lambda)$.

In base ai risultati di Agmon [4], nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet (nel caso cioè che $\lambda N(\lambda)g - A(x,\partial)N(\lambda)g = 0$ in Ω, $N(\lambda)g\big|_{\partial\Omega} = g$ con $g \in W^{2,p}(\Omega)$), si ha

$$(7) \qquad (1+|\lambda|)\|N(\lambda)g\|_{0,p} + \|N(\lambda)g\|_{2,p} \leq C((1+|\lambda|)\|\phi\|_{0,p} + \|\phi\|_{2,p}),$$

$\forall \phi \in W^{2,p}(\Omega)$ tale che $\phi - g\big|_{\partial\Omega} = 0$

Terreni riesce a ottenere:

$$(8) \quad (1+|\lambda|)\,\|N(\lambda)g\|_{0,p} + \|N(\lambda)g\|_{2,p} \leq C(\alpha)((1+|\lambda|)^{1-\alpha/2}\|\phi\|_{\alpha,p} + \|\phi\|_{2,p})$$

(per ogni $\alpha \in [0, \frac{1}{p}[$), formula che ha un certo interesse di per sé.

In un lavoro successivo [6], in collaborazione con P. Acquistapace, B. Terreni ha applicato i risultati suddetti allo studio di equazioni paraboliche quasi lineari. Tuttavia per certi tipi di applicazioni, il risultato di Terreni si rivela piuttosto inefficace (ad es. per lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni). In particolare, è disagevole disporre solo di un risultato di regolarità massimale per funzioni hölderiane nella variabile temporale e soprattutto crea grossi problemi la necessità della condizione

$$(9) \qquad A(x,\partial)u_0 + f(0,x) \in B^{2\alpha}_{p,\infty}(\Omega) \quad .$$

Mi è perciò sembrato utile un risultato di regolarità massimale che "coinvolgesse" soltanto funzioni semplicemente continue nella variabile temporale e non richiedesse alcuna ulteriore condizione tipo (9).

Il primo tentativo potrebbe essere, ad esempio, cercare un teorema di regolarità massimale per le funzioni in $C'([0,T]; L^p(\Omega)) \cap C([0,T]; W^{2,p}(\Omega))$. Ad esempio, si potrebbe tentare di provare che il problema

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(x,\partial)u = f(t,x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C'([0,T]; L^p(\Omega)) \cap C([0,T]; W^{2,p}(\Omega))$ $\forall f \in C([0,T]; L^p(\Omega))$.

Un risultato di questo genere è però impossibile per il seguente motivo: esso implicherebbe per ogni $f \in C([0,T]; L^p(\Omega))$ l'esistenza di una soluzione di (10) in $C'([0,T]; L^p(\Omega)) \cap C([0,T]; D(A))$.

Ora esiste un risultato di Baillon [7] che afferma quanto segue: sia E uno spazio di Banach, che non contiene alcun sottospazio isomorfo a c_0 (ad es. E è riflessivo o $E = L'(\Omega)$). Sia poi A il generatore infinitesimale di un semigruppo in E e A soddisfi la seguente condizione: $\forall f \in C([0,T];E)$ il problema

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t), \ t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

possiede una soluzione in $C'([0,T]; E) \cap C([0,T]; D(A))$. Allora, $A \in \mathscr{L}(E)$.

Quindi, per ottenere un risultato di regolarità massimale che coinvolga funzioni soltanto continue è, in un certo senso, necessario lavorare in spazi con cattive proprietà topologiche.

Questo è stato fatto da G. Da Prato e P. Grisvard in [1]. Il risultato fondamentale di [1] è il seguente: sia E uno spazio di Banach, A il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in E, $\theta \in]0,1[$. Indichiamo con $D_\theta(A)$ lo spazio di interpolazione continua tra E e D(A) di indice θ (cioè, la chiusura di D(A) in $(E,D(A))_{\theta,\infty}$). Per ogni $f \in C([0,T]; D_\theta(A))$, (11) possiede un'unica soluzione u in $C'([0,T];D_\theta(A))$, tale che $t \to Au(t) \in C([0,T]; D_\theta(A))$.

E' facile provare che la parte di A in $D_\theta(A)$ genera un semigruppo in $D_\theta(A)$. Ciò implica allora che $D_\theta(A)$ contiene un sottospazio isomorfo a c_0. Consideriamo ora il problema parabolico

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(x,\partial)u = f(t,x) \\ B_k(x,\partial)u - g_k(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0 \ , \quad k=1,\dots,m \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con i coefficienti di $A(x,\partial)$ continui su $\bar{\Omega}$, i coefficienti di $B_k(x,\partial)$ di classe $C^{2m-m_k}(\bar{\Omega})$ (se B_k è di ordine m_k). Supponiamo che $(A(x,\partial),(B_k(x,\partial))_{k=1}^m$ sia un problema ellittico regolare, $\mathrm{ord}A(x,\partial) = 2m$ e $\forall p \in]1,+\infty[$ l'operatore: $D(A) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega) \mid B_k(x,\partial)u\big|_{\partial\Omega} = 0 \ , \ K = 1,\dots,m\}$, $Au = A(x,\partial)u$ sia il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico.

Poniamo, per $0<\alpha<1$,

$$\lambda_p^\alpha(R^n) = \{f \in L^p(R^n) \mid \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{0<|h|<\delta} |h|^{-\alpha} \|u(\cdot+h)-u\|_p = 0\}, \qquad (13)$$

$$(13) \qquad \lambda_p^\alpha(\Omega) = \{f|_\Omega \mid f \in \lambda_p^\alpha(R^n)\}$$

Si prova che, se $2m\theta < \frac{1}{p}$, $D_\theta(A) = \lambda_p^{2m\theta}(\Omega)$. Quindi, se $g_k = 0 \ \forall K$, $u_0 = 0$, $\forall f \in C((0,T]; \lambda_p^{2m\theta}(\Omega))$, (12) possiede una soluzione u in $C'((0,T]; \lambda_p^{2m\theta}(\Omega))$ e

$t \to A(x,\partial)u(t,\cdot) \in C([0,T];\ \lambda_p^{2m\theta}(\Omega))$.

Vogliamo ora procurarci un risultato di regolarità massimale che estenda il precedente, nel caso dei g_k e u_0 non nulli. Supponiamo $0<\alpha<1$.

Si può, innanzi tutto, cominciare a provare quanto segue:
Siano i coefficienti di $A(x,\partial)$ di classe $C^{\alpha+\varepsilon}(\bar{\Omega})$ ($\varepsilon>0$ arbitrario) e i coefficienti di $B_k(x,\partial)$ di classe $C^{2m-m_k+\varepsilon}(\partial\Omega)$. Se $u\in W^{2,p}(\Omega)$, $A(x,\partial)u\in\lambda_p^{\alpha}(\Omega)$ ed esistono funzioni g_k in $\lambda_p^{2m-m_k+\alpha}(\Omega)$, tali che $B_k(x,\partial)u-g_k|_{\partial\Omega}=0$, $u\in\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega)$ $(= \{u\in W^{2m,p}(\Omega)\mid \forall\beta,\ |\beta| = 2m,\ \partial_x^{\beta}u\in\lambda_p^{\alpha}(\Omega)\}$.

Cerchiamo allora condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione u in $C'([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))\cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$.

Innanzi tutto, necessariamente, $f\in C([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))$. Inoltre $B_k(x,\partial)u\in C([0,T];\ \lambda^{2m+\alpha-m_k}(\Omega))$. Dall'appartenenza di u a $C'([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))\cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$, segue anche che $u\in\lambda^{1-m_k/2m}([0,T];\lambda_p^{m_k+\alpha}(\Omega))$ (se $0<\xi<1$, $\lambda^{\xi}([0,T];E) = \{u\in C([0,T];E)\mid \lim_{\delta\to 0^+}\ \sup_{0<|t-s|<\delta}\ |t-s|^{-\xi}\,\|u(t)-u(s)\|_E=0\}$, $\lambda^1([0,T];E)= = C'([0,T];E)$, $\lambda^0([0,T];E) = C([0,T];E)$) e quindi $B_k(x,\partial)u\in\lambda^{1-\frac{m_k}{2m}}([0,T];\lambda_p^{\alpha}(\Omega))$.

Infine, $u_0\in\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega)$.

Si prova, viceversa, che se $0<\alpha<\frac{1}{p}$, $\forall f\in C([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))$, $\forall g_k\in\lambda^{1-\frac{m_k}{2m}}([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))\cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha-m_k}(\Omega))$, $\forall u_0\in\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega)$, (12) ha una unica soluzione u in $C'([0,T];\lambda_p^{\alpha}(\Omega))\cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$.

La dimostrazione è fondata sulle idee di [4] e utilizza una rappresentazione della soluzione del tipo

$$(15)\quad u(t)=\exp(tA)u_0+\int_0^t \exp((t-s)A)\ g(s)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t k_k(t-s)g(s)ds$$

Naturalmente, K_k è definito come segue: per $\lambda\in\rho(A)$ il problema

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda u - A(x,\partial)u = 0 \quad \text{in } \Omega \\ B_r(x,\partial)u\big|_{\partial\Omega}=0 \ , \ r \neq K \\ B_k(x,\partial)u-g_k(x)\big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $N_k(\lambda)g_k \ \forall g \in \lambda_p^{2m+\alpha-m_k}(\Omega)$ e $N_k(\lambda)g_k \in \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega)$. Per $t>0$, $K_k(t)$ è definito come $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \exp(\lambda t)N_k(\lambda)d\lambda$

Per stimare (13), si utilizza poi un'opportuna generalizzazione delle stime di Agmon, sulla scia delle idee di [4].

Una volta ottenuto il risultato di regolarità massimale per (12), esso può essere esteso e utilizzato in varie direzioni.

Si può, ad esempio, provare il seguente risultato; siano X e Y due spazi di Banach con $X \subsetneq Y$ e sia $\beta \in [0,1]$. Diremo che lo spazio di Banach Z è di tipo β rispetto a (X,Y) se $X \subset Z \subset Y$ e, $\forall x \in X$, $\|x\|_Z \leq C\|x\|_X^{1-\beta}\|x\|_Y^{\beta}$. Supponiamo allora che, per $0<\theta<1$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$, X_θ sia di tipo $\theta(\theta \in 0,1[)$ rispetto a $(\lambda_p^{\alpha}(\Omega), \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$, e, per $K=1,\dots,m$, $Y_{k,\theta}$ sia di tipo θ tra $\lambda_p^{\alpha}(\Omega)$ e $\lambda_p^{m_k+\alpha}(\Omega)$, $Z_{K,\theta}$ sia di tipo θ tra $\lambda_p^{2m-m_k+\alpha}(\Omega)$ e $\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega)$. Sia $M \in \mathscr{L}(X_\theta, \lambda_p^{\alpha}(\Omega))$, $N_k \in \mathscr{L}(Y_{k,\theta}, \lambda_p^{\alpha}(\Omega))$ $(Z_{k,\theta}, \lambda_p^{2m-m_k+\alpha}(\Omega))$.

Allora, il problema

$$(17)\qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = A(x,\partial)u + Mu(t,\cdot) + g(t,x) \\ B_k(x,\partial)u + N_k u(t,\cdot) - g_k(t,\cdot)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^1([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega)) \cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))\ \forall f \in C([0,T);\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega))$, $g_k \in \lambda^{1-\frac{m_k}{2m}}([0,T];\ \lambda_p^{\alpha}(\Omega)) \cap C([0,T];\ \lambda_p^{2m+\alpha-m_k}(\Omega))$, $u_o \in \lambda_p^{2m+\theta}(\Omega)$.

Un risultato analogo può essere stabilito per l'equazione lineare non autonoma:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A(t,x,\partial)u + f(t,x) \\ B_k(t,x,\partial)u - g_k(t,x)\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \\ u(o,x) = n_o(x), \end{cases}$$

se i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ sono di classe $C([0,T];\ \lambda_{\infty}^{\alpha}(\Omega))$ e i coefficienti di $B_k(t,x,\partial)$ di classe $C(0,T];\lambda_p^{2m-m_k+\alpha}(\Omega)) \cap \lambda^{1-m_k/2m}(0,T];\ \lambda_{\infty}^{\theta}(\Omega))$.

Infine è possibile provare il seguente risultato per l'equazione quasi lineare:

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\sum_{|\beta|=2m} a_\beta(t,x,y,\ldots,\partial^{2m-1}u)\partial^\beta u = f(t,x,u,\ldots,\partial^{2m-1}u) \\ \displaystyle\sum_{|\beta|=m_k} B_{k\beta}(t,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u)\partial^\beta u - g_k(t,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u)\Big|_{\partial\Omega}=0, \quad K=1,\ldots,m \\ u(o,x) = u_o(x) \end{cases}$$

Supponiamo che le funzioni $a_\beta, f, B_{k\beta}, g_k$ siano di classe C^∞, e per ogni scelta di $t, u, \ldots, \partial^{2m-1}u$ il problema ellittico $\left(\displaystyle\sum_{|\beta|=2m} a_\beta(t,x,u,\ldots,\partial^{2m-1}u)\partial^\beta,\right.$ $\left.\left(\displaystyle\sum_{|\beta|=m_k} B_{k\beta}(t,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u)\partial^\beta\right)_{k=1}^m\right)$ sia regolare. Allora, $\forall u_o \in \lambda_p^{2m+\alpha}(0,T],\Omega)$

con $0<\alpha<\frac{1}{p}$ e $p>n$, tale che $\sum_{|\beta|=m_k} B_{k\beta}(0,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u_o)\partial^\beta u_o - g_k(0,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u_o)\big|_{\partial\Omega}=0$, (19) possiede una e una sola soluzione locale in $C'([0,\delta[;\lambda_p^\alpha(\Omega))\cap C([0,\delta[;\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$, per qualche $\delta>0$.

Per di più, la soluzione locale è unica in $C'([0,\delta[;L^p(\Omega))\cap C([0,\delta[;W^{2m,p}(\Omega))$.

Proviamo solo quest'ultimo punto: sia u soluzione di (19), $u\in C'([0,\delta'];L^p(\Omega))\cap C([0,\delta];W^{2m,p}(\Omega))$.

Per quanto provato nel caso di (16), esiste unica $v\in C'([0,\delta'];\lambda_p^{\alpha'}(\Omega))\cap C([0,\delta];\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$ per qualche $\alpha'>0$, tale che

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \displaystyle\sum_{|\beta|=2m} a_\beta(t,x,u,\ldots,\partial^{2m-1}u)\partial^\beta v = f(t,x,u,\ldots,\partial^{2m-1}u) \\ \displaystyle\sum_{|\beta|=m_k} B_{k\beta}(t,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u)\partial^\beta v - g_k(t,x,\ldots,\partial^{m_k-1}u)\big|_{\partial\Omega}=0 \\ V(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

Per i risultati di Solonnikov [2], v è l'unica soluzione di (20) anche in $W^{1,p}([0,\delta'];L^p(\Omega))\cap L^p([0,\delta'],W^{2m,p}(\Omega))$. Poiché però u è soluzione di (18) e possiede la regolarità richiesta in [5], $u=v$ e quindi $u\in C'([0,\delta'];\lambda_p^{\alpha'}(\Omega))\cap C([0,\delta'];\lambda_p^{2m+\alpha}(\Omega))$.

Ciò permette (iterando il ragionamento) di concludere che $u\in C'([0,\delta[;\lambda_p^{\alpha''}(\Omega))\cap C[0,\delta[;\lambda_p^{2m+\alpha''}(\Omega))$, con $\alpha''>\alpha'$.

Con un numero finito di passaggi, si arriva al risultato voluto. Questi ultimi risultati sono contenuti nel lavoro [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DA PRATO, P. GRISVARD, "Equations d'evolution abstraites non lineaires de type parabolique", Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser., 22, 329-396 (1979).

[2] V.A. SOLONNIKOV, "Boundary value problems of mathematical physics III", (ed. O.A. Ladyzenskaya), Proc. Steklov Inst. Math. 83 (1965).

[3] P. GRISVARD, "Equations differentielles abstraites", Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4 Ser., t. 2, 311-395 (1969).

[4] B. TERRENI, "Nonhomogeneous initial boundary value problems for linear parabolic systems", accettato su Studia Math.

[5] S. Agmon, "On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems", Comm. Pure Appl. Math., 15, 119-147 (1962).

[6] P. ACQUISTAPACE, B. TERRENI, "On quasilinear parabolic systems" accettato su Math. Ann.

[7] D. GUIDETTI, "A maximal regularity result with applications to parabolic problems with nonhomogeneous boundary conditions", preprint.